

Title	或ル無限小変換ニ就テ
Author(s)	朝長, 康郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(14) p.478-p.481
Issue Date	1949-05-30
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75278
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

144. 或ル無限小変換ニ就テ

朝長 康 郎 (Dec. 21. 1948)

§0. 本誌第二輯第七号談話69デ述ベタ空間ノ事ヲ再ビ記スト R_n ヲ基本
二次形式ガ g_{ij} ノ n 次元 Riemann空間トシ 其ノ各点 $x^i = \infty^{n+1}$ 個
ノ超球ノ集リデアール空間ヲ接触サセル.

超球ヲ表スノニ

$$(0.1) \quad v^\lambda = \begin{cases} v^i (\lambda=i) \cdots \cdots \text{超球ノ中心ヲ表ス } R_n \text{ ノ 反変ベクトル.} \\ v^0 (\lambda=0) \cdots \cdots \text{超球ノ半径ヲ表ス } R_n \text{ ノ スカラ } \cdots \cdots \end{cases}$$

ヲ以テスル. 以下ギリシヤ添字ハ 0カラ n 迄 ラテン添字ニ超球 v^λ

w^λ ノ間ノ共通切線距離ノ自乗ハ.

$$(0.2) \quad D^2 = g_{\lambda\mu} (v^\lambda - w^\lambda)(v^\mu - w^\mu)$$

但シ

$$(0.3) \quad g_{\lambda\mu} = \begin{cases} g_{ij} & (\lambda=i, \mu=j) \\ 0 & (\lambda=i, \mu=0) \\ -1 & (\lambda=0, \mu=0) \end{cases}$$

ヲ定義スル。隣同志ノ超球空間ノ関係ヲ表ス。超球ノ共変微分ハ

$$(0.4) \quad \delta V^\lambda = dV^\lambda + \Gamma_{\mu k}^\lambda V^\mu dx^k$$

デ與ヘル。 $\Gamma_{\mu k}^\lambda$ ハ共通切線距離ノ不変性ヲテ 次ノ條件ヲ満足シナケレバナラナイ。

$$(0.5) \quad \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^\lambda}{\partial x^i} = g_{\sigma \mu} \Gamma_{\lambda i}^\sigma + g_{\sigma \lambda} \Gamma_{\mu i}^\sigma$$

尚 茲デ

$$(0.6) \quad \Gamma_{ij}^\sigma = \Gamma_{ji}^\sigma$$

ヲ要請スレバ

$$(0.7) \quad \begin{cases} \Gamma_{jk}^i = \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \\ \Gamma_{ij}^0 = g_{im} \Gamma_{0j}^m \\ \Gamma_{0k}^0 = 0 \end{cases}$$

トナル。又 (0.6) ト違ッテ

$$(0.8) \quad \Gamma_{jk}^i = -\Gamma_{kj}^i, \quad \Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{kj}^0 = 0$$

トシテモ、(0.7) ハ成立ツ。(0.8) ハ談話 69 デ述ベタ様ニ

Einstein-Meyer ノ統一場理論ヲ與ヘルモノデアル。

§ 1. 以上ノ如ク構成サレタ Laguerre 接線空間ノ各点ニ一ツノ超球ガ分布シテキルトスル。其ノ式ヲ

$$(1.1) \quad V^\lambda = V^\lambda(x)$$

トシ、之ニ次ノ無限小変換ヲ加ヘル。

$$(1.2) \quad \bar{V}^\lambda = V^\lambda + \varepsilon \xi^\lambda$$

之ヲ無限小トスル。即チ、点ハ其ノママニシテ超球グケヲウツズラスノデアル。其ノ際 変換ニ超球間ノ共通切線距離ノ変化ハ次ノ様デアル。

$$(1.3) \quad g_{\lambda \mu} (\delta \bar{V}^\lambda + dx^\lambda) (\delta \bar{V}^\mu + dx^\mu) - g_{\lambda \mu} (\delta V^\lambda + dx^\lambda) (\delta V^\mu + dx^\mu) \\ = \varepsilon \{ g_{\lambda \mu} (\delta V^\lambda + dx^\lambda) \delta \xi^\mu + g_{\mu \lambda} (\delta V^\mu + dx^\mu) \delta \xi^\lambda \} + \varepsilon^2 \{ \quad \}$$

茲デ、 ε ノ係數ヲ 0 トオケバ

$$(1.4) \quad g_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^\lambda v^k + \delta_j^\lambda \right) \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^k} + \Gamma_{\sigma k}^\mu \xi^\sigma \right) \\ + g_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^\lambda v^k + \delta_k^\lambda \right) \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^j} + \Gamma_{\sigma j}^\mu \xi^\sigma \right) = 0$$

即ち 無限小変換 (1.2) が超球群 (1.1) の共通切線距離ヲ変へナイ筈ニハ
 ξ が (1.4) ヲ満足シナケレバナラヌ。(1.4)ニ於テ 特ニ

$$v^\lambda = 0$$

即ち 最初ノ超球群ガ実ハ点デソツク場合ハ (1.4) ハ

$$(1.5) \quad g_{jm} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} + \Gamma_{\sigma k}^m \xi^\sigma \right) + g_{km} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial x^j} + \Gamma_{\sigma j}^m \xi^\sigma \right) = 0$$

トナル。(1.5)ハ R_n ノ各点ガ ξ^λ ナル無限小超球ニ変換シタトキ
 隣接2点間ノ距離ガ対応スル隣接2超球間ノ共通切線距離ト2次ノ無限小ヲ
 除イテ一致スル事ト同値デアル。

$$\lim \xi^m = \xi_i$$

トオケバ (1.5) ハ

$$(1.6) \quad \xi_{j||k} + \xi_{k||j} + \xi^0 (\Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{kj}^0) = 0$$

トナル。茲ニ

$$(1.7) \quad \xi_{j||k} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} m \\ jk \end{matrix} \right\} \xi_m$$

(1.6) デ 2通りノ場合ヲ考ヘル。

$$(1.8) \quad \begin{cases} (a) \quad \xi_{j||k} + \xi_{k||j} = -2\xi^0 \Gamma_{jk}^0 & (\Gamma_{jk}^0 = \Gamma_{kj}^0) \\ (b) \quad \xi_{j||k} + \xi_{k||j} = 0 & \vee \quad (\Gamma_{jk}^0 = -\Gamma_{kj}^0) \end{cases}$$

(1.6) ヲ 無限小 Laguerre 変換ト呼ブコトニスル。

§2. (1.8)ハ4通りノ場合ガ考ヘラレル。先ヅ (1.8)b.ハ Killing
 ノ方程式デアルカラ、之ガ最大 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個ノ任意常数ヲ含ム解ヲ持ツノハ
 R_n ガ定曲率空間ノ場合ニ限ルコトハ周知ノ通りデアル。 ξ ノ方ハ何
 デモヨイ。即チ $\Gamma_{jk}^0 = -\Gamma_{kj}^0$ ノ場合ハ問題ハ非常ニ簡単ニナル。

$$dx^\lambda = \begin{cases} dx & (\lambda=i) \\ 0 & (\lambda=0) \end{cases}$$

(1.8) a 之ニハ 三通りノ場合ヲ考ヘラレル.

$$(A) \quad \begin{cases} \xi^0 = 0 \\ \xi_{jlk} + \xi_{kij} = 0 \end{cases}$$

之ハ Killing ノ方程式デアルカラ前ト全ジニナル. 此ノ場合ハ点ガ
点ニ移行スルカテ実ハ R_n ノ無限小運動デアル.

$$(B) \quad \begin{cases} \rho_{jk}^0 = \xi_{jlk} \\ \xi_{jlk} + \xi_{kij} = -2 \int \xi^0 g_{jk} \end{cases}$$

之ハ R_n ノ無限小共変換ノ式デアル. 最大ノ任意係数ヲ含ム解ヲ有スル
ノハ R_n ガ共形的ニ平坦ナ場合ニ限ルコトガ知ラレデキル.*

(C) 次ニ一般ノ場合即チ (A) デモ (B) デモナイ場合.

此ノ場合. (1.8. a) ノ完全積分可能條件ヲ求メル事ハ容易ナ事デハ
ナイ. 然シ (1.8. b) ガ假リニーツノ解 ξ^0 ヲ許シタトスレバ
 ρ_{ij}^0 ハ 次ノ形ヲ取ル.

$$(2.1) \quad \rho_{ij}^0 = - \frac{\xi_{jlk} + \xi_{kij}}{2\xi^0}$$